ثانياً: طريقة لاكرانج «Lagrange methods»

تستخدم هذه الطريقة لحل معادلات لاكرانج ذات الصيغة:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)\ \ldots\ldots (1)$$

نعوض عن $\frac{\partial z}{\partial x}$ بـ p وعن $\frac{\partial z}{\partial y}$ بـ q ليتم وضعها (1) كالآتي:

$$Pp+Qq=R\ \ldots\ldots (2)$$

وليكن حلها يمثل بالعلاقة:

$$U(x,y,z)=a\ \ldots\ldots (3)$$

نشتق العلاقة (3) بالنسبة الى x نستطيع:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\longrightarrow 0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot p$$

$$\longrightarrow -\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}p\longrightarrow p=\frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\ \ldots\ldots (4)$$

نشتق العلاقة (3) بالنسبة الى y نستطيع:

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow 0=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot q.$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}q\longrightarrow q=\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\ \ldots\ldots (5)$$

نعوض العلاقات (4) و (5) في العلاقة (2) نحصل على :

$$P\left(\frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)+Q\left(\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=R \longrightarrow$$ نضرب بـ $\frac{\partial u}{\partial z}$

$$-P\frac{\partial u}{\partial x}-Q\frac{\partial u}{\partial y}=R\frac{\partial u}{\partial z} \longrightarrow P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \ldots\ (6)$$

التفاضل التام للعلاقة (3) يعطي :

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0 \quad \ldots\ldots (7)$$

من خواص التناسب ومقارنة العلاقتين (6) و (7) نحصل على :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\left\{ \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{\frac{\partial u}{\partial x}P}=\frac{dx}{P} \right.$$

العلاقة (8) تسمى معادلة لاكرانج المتابعة Lagrange subsidiary Equ.

والتي يمكن أن نأخذ أي صيغ منها لتكوين معادلتين تفاضليتين اعتياديتين نجد $u=a$ ثابت لأحدهما و $v=b$ ثابت للأخرى ويكون الحل العام للمعادلتين بالشكل : $\phi(u,v)=0$.

ملاحظة : اذا لم نستطع ايجاد معادلات تحل مباشرة من حدود المعادلة (8) فإنه يمكن نستخدم خواص التناسب وذلك بجمع البسوط مع بعضها اضافة الى المقامات وكذلك يمكن ضرب وقسمة بسط ومقام أي حد من الحدود أو ضرب أو قسمة بسوط كل الحدود بمقدار معين.

مثال: جد الحل العام للمعادلة:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

بعد أن تأكدنا من كون المعادلة من صيغة لاكرانج نقوم بكتابة المعادلة التابعة لها:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\longrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{1}.$$

$$\circledast\ \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\longrightarrow\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0\xrightarrow[\text{الطرفين}]{\text{نكامل}}\ln x-\ln y=0+c\quad\left\{\begin{matrix}\text{let}\\ c=\ln a\end{matrix}\right\}$$

$$\longrightarrow\ln x-\ln y=\ln a\longrightarrow\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln a\xrightarrow{e}\frac{x}{y}=a.$$

$$\circledast\ \frac{dy}{y}=\frac{dz}{1}\quad\frac{dy}{y}-dz=0\longrightarrow\ln y-z=0+b\to\ln y-z=b.$$

الحل العام هو: $\phi(u=a,\ v=b)=\phi\left(\frac{x}{y},\ \ln y-z\right)=0.$

مثال: حل المعادلة:

$$x(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=z(x-y).$$

بعد أن تأكدنا من كون المعادلة من صيغة لاكرانج نكتب المعادلة التابعة لها:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\longrightarrow\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}.$$

نلاحظ أنه عند اختيار أي حدين لا نستطيع أن نكون معادلة اعتيادية بسبب وجود ثلاث متغيرات لا يمكن تكاملها مباشرة لذلك في مثل هذه الحالات نستخدم خواص التناسب الآتي:

$$\frac{dx+dy}{xy-xz+yz-yx}=\frac{dz}{z(x-y)} \longrightarrow \frac{dx+dy}{-z(x-y)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\Rightarrow dx+dy+dz=0 \longrightarrow x+y+z=a$$

الآن نقوم بضرب أطراف المعادلة الثابعة ب xyz لنحصل على:

$$\frac{xyz\,dx}{x(y-z)}=\frac{xyz\,dy}{y(z-x)}=\frac{xyz\,dz}{z(x-y)} \longrightarrow \frac{yz\,dx}{y-z}=\frac{xz\,dy}{z-x}=\frac{xy\,dz}{x-y}$$

$$\frac{yz\,dx+xz\,dy}{y-z+z-x}=\frac{xy\,dz}{x-y} \longrightarrow \frac{yz\,dx+xz\,dy}{y-x}=\frac{xy\,dz}{x-y}$$

$$\longrightarrow \frac{yz\,dx+xz\,dy}{y-x}=\frac{xy\,dz}{-(y-x)} \Longrightarrow$$

$$yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0 \longrightarrow d(xyz)=0$$

$$\longrightarrow xyz=b.$$

$$\therefore \phi(u=a,\ v=b)=\phi(x+y+z,\ xyz)=0$$

وهو يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة

(الحدود أو ضرب أو قسمة بسط أو الحدود بعدد معين.)

مثال (٥) حل المعادلة: $(y^3x-2x^4)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z(x^3-y^3)$

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\longrightarrow\frac{dx}{(y^3x-2x^4)}=\frac{dy}{(2y^4-x^3y)}=\frac{dz}{z(x^3-y^3)}$$

$$\frac{dx}{(y^3x-2x^4)}=\frac{dy}{(2y^4-x^3y)}\xrightarrow[\text{بالطرفين}]{\text{وسطين}}(2y^4-x^3y)\,dx=(y^3x-2x^4)\,dy$$

$$\xrightarrow[(y^3x-2x^4)]{\div dx}\frac{dy}{dx}=\frac{(2y^4-x^3y)}{(y^3x-2x^4)}\xrightarrow{\div x^4}\frac{dy}{dx}=\frac{2\frac{y^4}{x^4}-\frac{y}{x}}{\frac{y^3}{x^3}-2}\Longrightarrow$$

واضح انها معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(\frac{y}{x})^4-\frac{y}{x}}{(\frac{y}{x})^3-2}\ ,\ \text{let } V=\frac{y}{x}\longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2V^4-V}{V^3-2}\quad\dots (*)$$

$$\text{we have } V=\frac{y}{x}\longrightarrow y=Vx\xrightarrow[\text{بالنسبة}]{\text{نشتق}}\frac{dy}{dx}=V+x\frac{dV}{dx}$$

نعوض في معادلة (*)

$$V+x\frac{dV}{dx}=\frac{2V^4-V}{V^3-2}\longrightarrow x\frac{dV}{dx}=\frac{2V^4-V}{V^3-2}-V$$

نوحد مقامات

$$\longrightarrow x\frac{dV}{dx}=\frac{2V^4-V-V^4+2V}{V^3-2}\longrightarrow x\frac{dV}{dx}=\frac{V^4+V}{V^3-2}$$

لأنه نفصل المتغيرات لأجل إمكانية التكامل

$$\longrightarrow x\,dV\,(V^3-2)=(V^4+V)\,dx\xrightarrow[V^4+V]{\div x}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{V^3-2}{V^4+V}\,dV$$

تم فصل المتغيرات (لانه نكامل الطرفين)، والطرف الأيمن يكامل بطريقة الكسور الجزئية. سنكامل الأيسر مباشرة.

$$\int \frac{V^3-2}{V^4+V}\,dV = \int \frac{V^3-2}{V(V^3+1)}\,dV = \int \left(\frac{A}{V} + \frac{BV^2+CV+D}{V^3+1}\right)$$

$$= \frac{\underbrace{AV^3+A+BV^3+CV^2+DV}}{V(V^3+1)} \longrightarrow$$

$$V^3-2 = AV^3+A+BV^3+CV^2+DV$$

$$\underline{\underline{V^3}} - \underline{\underline{2}} = (A+B)\underline{\underline{V^3}} + CV^2 + DV + \underline{\underline{A}} \qquad \{\text{قارن}\} \left\{ \text{وضع الحدود } V^2 \text{ و } V \text{ غير موجودة} \right\} \text{ بالطرف الأيسر}$$

$$A+B=1 \;,\; C=D=0 \;,\; A=-2 \;\therefore A+B=1 \Rightarrow -2+B=1 \Rightarrow B=3.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{-2}{V} + \frac{3V^2}{V^3+1}\right) dV \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{let} \\ C = \ln a \end{array} \right\}$$

$$\ln x + C = -2\ln V + \ln(V^3+1)$$

$$\ln x + \ln a = \ln V^{-2} + \ln V^3+1$$

$$\ln(xa) = \ln(V^{-2})\cdot(V^3+1) \longrightarrow \ln xa = \ln \frac{V^3+1}{V^2} \xrightarrow{\text{خذ } e}$$

$$xa = \frac{V^3+1}{V^2} \longrightarrow xa = V + \frac{1}{V^2} \Rightarrow xa = \frac{y}{x} + \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}} \longrightarrow$$

$$xa = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y^2} \xrightarrow{\text{نضرب} \times \frac{1}{x}} a = \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}$$

$$\text{Now } \frac{dx/x}{(y^3-2x^3)} = \frac{dy/y}{(2y^3-x^3)} = \frac{dz/z}{x^3-y^3} \longrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + 3\frac{dz}{z} = 0 \quad \text{كامل الآن}$$

$$\ln x + \ln y + 3\ln z = c \Rightarrow \ln x + \ln y + \ln z^3 = \ln b$$

$$\therefore \ln(xyz^3) = \ln b \xrightarrow{\text{نأخذ}} xyz^3 = b$$

الحل العام هو: $\phi\left(\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2},\ xyz^3\right) = 0$ ∴

مثال ٤

حل المعادلة: $(x-y)p + (y-z-x)q = z$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \longrightarrow \frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{y-z-x} = \frac{dz}{z} \longrightarrow$$

$$\frac{dx+dy}{x-y+y-z-x} = \frac{dz}{z} \longrightarrow \frac{dx+dy}{-z} = \frac{dz}{z} \xrightarrow{\text{[illegible]}}$$

نضرب $\Leftarrow$ $-dx-dy=dz$

$dx+dy+dz$

$$dx+dy+dz=0 \longrightarrow x+y+z=a \Big\} \Rightarrow x+z=a-y \Big\}$$

$$\frac{dy}{y-z-x} = \frac{dz}{z} \longrightarrow \frac{dy}{y-(x+z)} = \frac{dz}{z} \longrightarrow$$

$$\frac{dy}{y-(a-y)} = \frac{dz}{z} \longrightarrow \frac{dy}{y-a+y} = \frac{dz}{z} \longrightarrow \frac{dy}{2y-a} = \frac{dz}{z} \xrightarrow[\text{للطرفين}]{\text{تكامل}}$$

$$\frac{1}{2}\ln(2y-a) = \ln z + c \longrightarrow \frac{1}{2}\ln(2y-a) = \ln z + \ln b$$

$$\ln(2y-a)^{\frac{1}{2}} = \ln(zb) \xrightarrow{e} (2y-a)^{\frac{1}{2}} = zb \longrightarrow$$

$$b = \frac{\sqrt{2y-a}}{z} \xrightarrow{\text{تعويض}} b = \frac{\sqrt{2y-x-y-z}}{z} \longrightarrow b = \frac{\sqrt{y-x-z}}{z}$$

$$\therefore \phi\left(x+y+z,\ \frac{\sqrt{y-x-z}}{z}\right) = 0$$ الحل العام

تمارين واجب

① $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

② $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$

③ $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)z.$

④ $y^2 z p - x^2 z q = x^2 y$

⑤ $x(y^2 - z^2)p + y(z^2 - x^2)q = z(x^2 - y^2).$

⑥ $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$